

# ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МОРФОГЕНЕЗА РАСТЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Р.Ю. Уколов, студент  
Научный руководитель – Н.Н. Меркулова, ст. преп.  
Томский государственный университет  
E-mail: roman\_ukolov@bk.ru

Морфогенез представляет собой одну из наиболее непростых для моделирования задач биологии [1]. Моделирование осуществляется, как правило, в одномерной или двумерной постановке. Характерной особенностью задач морфогенеза растений является наличие сложной геометрии, существование множественности решений, нелинейная зависимость от входных данных и параметров моделей. Несмотря на то, что в настоящее время имеется большое количество методов моделирования разных аспектов морфогенеза, разработаны отдельные программные продукты и даже языки программирования, математическое моделирование морфогенеза всё ещё находится в стадии становления. Каждая из существующих на сегодняшний день моделей отражает лишь фрагмент широкого диапазона процессов, происходящих во время развития организма растения.

В данной работе изучается модель типа "реакция-диффузия", описывающая взаимодействие двух реагирующих веществ на равномерных и адаптивных сетках.

Модель типа «реакция-диффузия» представлена следующей системой [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1(u, v); \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_2(u, v); \end{cases}$$

где 
$$\begin{cases} f_1(u, v) = a + u^2 v - (b + 1)u; \\ f_2(u, v) = bu - u^2 v. \end{cases}$$

В изучаемой модели  $u(x, t), v(x, t)$  – концентрации двух реагирующих веществ,  $D_u, D_v$  – их коэффициенты диффузии,  $a$  и  $b$  – параметры реакции,  $x, t$  – пространственная и временная переменные.

Рассматривается реактор с непроницаемыми стенками длины  $l$ . Считается, что в момент времени  $t=0$  известны начальные концентрации:

$$u(x, 0) = U_0(x), v(x, 0) = V_0(x).$$

Граничные условия задаются в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) = 0.$$

Если допустить, что реактор имеет достаточно малый объём и время усреднения реакции по объёму за счёт диффузии много меньше характерного времени всей реакции, то тогда процесс будет протекать во всех точках объёма одинаково во времени, и будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a + u^2 v - (b+1)u; \\ \frac{dv}{dt} = bu - u^2 v. \end{cases}$$

Начальные условия задаются в виде:

$$\begin{cases} u(0) = 1; \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

Проведено исследование системы ОДУ: найдены стационарные решения, установлена их устойчивость [3] и получены ограничения на параметры модели. Затем модель типа "реакция-диффузия" изучалась с помощью явной схемы и схемы Кранка-Николсон на равномерных и адаптивных сетках [4]. Разностные схемы исследованы на аппроксимацию, устойчивость, сходимости.

Явная схема записывается на равномерной сетке и имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = D_u \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + f_1(u_j^n, v_j^n); \\ \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} = D_v \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} + f_2(u_j^n, v_j^n); \\ j = 1, \dot{M} - 1, n = 1, \dot{N} - 1 \end{cases}$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} u_j^0 = 1; \\ v_j^0 = 1. \end{cases}$$

$$j = 0, \dot{M}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= u_1^{n+1}; & u_M^{n+1} &= u_{M-1}^{n+1}; \\ v_0^{n+1} &= v_1^{n+1}; & v_M^{n+1} &= v_{M-1}^{n+1}; \end{aligned}$$

Схема Кранка-Николсон описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{D_u}{2h^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + f_1(u_j^n, v_j^n); \\ \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} = \frac{D_v}{2h^2} (v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1} + v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + f_2(u_j^n, v_j^n); \\ j = 1, \dot{M} - 1, n = 0, \dot{N} - 1 \end{cases}$$

Начальные и граничные условия такие же, как в явной схеме.

По построенным разностным схемам проводился вычислительный эксперимент на компьютере при заданных значениях параметров. Результаты расчётов оформлены в виде графиков и иллюстрируют характер поведения функций  $u(t), v(t)$  с течением времени в зависимости от начальных данных и параметров модели. Полученные результаты согласуются между собой и правильно отражают физику процесса.

Настоящая работа может быть полезна тем, кто занимается изучением математических моделей биофизики и решением задач математической физики.

Список литературы:

- 1 Математическое моделирование морфогенеза растений / Лазарева Г. Г., Миронова В. В., Омелянчук Н. А., Шваб И. В., Вшивков В. А., Горпинченко Д. Н., Николаев С. В., Колчанов Н. А. // Сиб. журн. вычисл. Математики. – 2008. – Т. 11, №2. – С. 151-166.
- 2 Романовский Ю. М. Математическая биофизика / Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 304 с.
- 3 Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии / Г. Ю. Ризниченко – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2003. – 184 с.
- 4 Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. - М.: Мир, 1972.- 420с.