ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ПРЕПЯТСТВИЯ В ПОТОКЕ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А.А. Жалнина - старший преподаватель кафедры фундаментальной математики
ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», г. Кемерово
E-mail: qwert1776@yandex.ru

Целью настоящей работы является нахождение оптимальной фомы препятствия, обтекаемого потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей, обеспечивающей минимальное сопротивлене набегающему потоку. Математическая постановка задачи заключается в следующем. Пусть препятствие, представляющее собой компактное множество S с достаточно гладкой границей ∂S лежит в ограниченной области B с границей $\Sigma = \partial B$ класса C^3 в евклидовом пространстве R^3 точек $x = (x_1, x_2, x_3)$; $\Omega = B \setminus S$ - область течения (см. рис. 1); $U^{(j)}, j = 1,2$ – заданные векторные поля класса $C^3(R^3)$, обращающиеся в нуль в окрестности множества S; n – вектор внешней нормали к границе Σ. Граница Σ области B, состоит из так называемых участков «втекания»: $\Sigma_{in}^j = \{x \in \Sigma : U^{(j)} \cdot n < 0\}, j = 1,2$, участков «вытекания»: $\Sigma_{out}^j = \{x \in \Sigma : U^{(j)} \cdot n > 0\}, j = 1,2$, и замкнутых одномерных многообразий $\Gamma^j = cl\Sigma_{in}^j \cap (\Sigma \setminus \Sigma_{in}^j), j = 1,2$, т. е. $\Sigma = \Sigma_{in}^j \cup \Gamma^j \cup \Sigma_{out}^j$. Векторные поля $U^{(j)} \in C^3(\partial\Omega)$ удовлетворяют условиям: $\int_\Sigma U^{(j)} \cdot n ds = 0$ и $U^{(j)} \cdot \nabla(U^{(j)} \cdot n) > C > 0$ на $\Gamma^j, j = 1,2$.

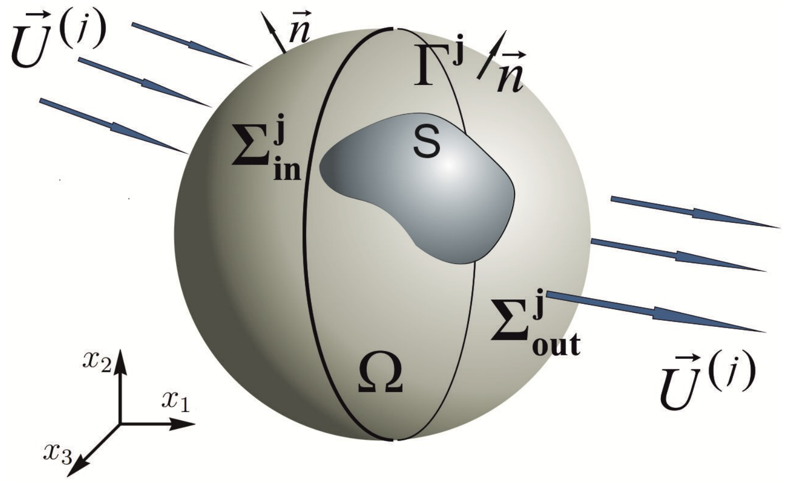

Рис. 1. Область течения j-той компоненты смеси

Стационарное обтекание препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей характеризуется полями скоростей $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, плотностями ρ_1, ρ_2 и давлениями p_1, p_2 составляющих ее компонент, которые являются решением следующей краевой задачи

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\left(\vec{u}^{(j)}\right) + \mathrm{Re}\,\rho_i\left(\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla\right)\vec{u}^{(i)} + \frac{\mathrm{Re}}{Ma^2}\nabla p_i + (-1)^i a\left(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}\right) = 0 \text{ в } \Omega, i = 1,2, \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\left(\rho_i u^{(i)}\right) = 0 \text{ в } \Omega, i = 1,2, \quad (2)$$

$$u^{(j)} = U^{(j)} \text{ на } \Sigma,\ u^{(j)} = 0 \text{ на } \partial S,\ j = 1,2, \quad (3)$$

$$\rho_j = \rho_j^0 \text{ на } \Sigma_{in}^j,\ j = 1,2. \quad (4)$$

Здесь $p_i = p_i(\rho_i)$, $i = 1,2,$ - заданная гладкая функция, Re и Ma обозначают числа Рейнольдса и Маха соответственно, слагаемое $J^{(i)} = (-1)^{(i)} a\left(u^{(2)} - u^{(1)}\right)$ характеризует интенсивность обмена импульсами между компонентами смеси, a, $\rho_j^0, j = 1,2$, - заданные положительные постоянные, $L_{ij}\left(u^{(j)}\right) = -\mu_{ij}\Delta u^{(j)} - \left(\mu_{ij} + \lambda_{ij}\right)\nabla \mathrm{div} u^{(j)}, i, j = 1,2,$ причем постоянные (безразмерные) коэффициенты вязкости μ_{ij}, λ_{ij} удовлетворяют условиям: $4(\lambda_{11} + 2\mu_{11})(\lambda_{22} + 2\mu_{22}) - (\lambda_{12} + 2\mu_{12} + \lambda_{21} + 2\mu_{21})^2 > 0$, $\mu_{11} > 0$, $\lambda_{11} + \mu_{11} > 0$, $4\mu_{11} \cdot \mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0$.

Действующая на тело S гидродинамическая сила со стороны i-той составляющей смеси определяется по формуле

$$\vec{J}^{(i)}(S) = -\int_{\partial S}\left(\sum_{j=1}^{2}\left[\mu_{ij}\left(\nabla\vec{u}^{(j)} + \left(\nabla\vec{u}^{(j)}\right)^T\right) + \lambda_{ij} div\vec{u}^{(j)} I\right] - \frac{\mathrm{Re}}{Ma^2} p_i(\rho_i) I\right)\cdot\vec{n} ds.$$

Сила сопротивления, действующая на тело S со стороны i-той составляющей смеси является компонентой гидродинамической силы параллельной U^∞ (постоянный вектор, скорость смеси на внешней границе области течения): $J_D^{(i)}(S) = U^\infty \cdot J^{(i)}(S)$. Функционал сопротивления получается как сумма сил сопротивлений порожденных компонентами смеси:

$$\vec{J}_D(S) = -\vec{U}^\infty \cdot \sum_{i=1}^{2}\int_{\partial S}\left(\sum_{j=1}^{2}\left[\mu_{ij}\left(\nabla\vec{u}^{(j)} + \left(\nabla\vec{u}^{(j)}\right)^T\right) + \lambda_{ij} div\vec{u}^{(j)} I\right] - \frac{\mathrm{Re}}{Ma^2} p_i(\rho_i) I\right)\cdot\vec{n} ds. \quad (5)$$

При фиксированных B, U^∞, $U^{(j)}$, $\rho_j^0, j = 1,2,$ он зависит только от формы обтекаемого тела S. Оптимальная форма должна минимизировать силу сопротивления (5), удовлетворяя заданным ограничениям (1) - (4).

Для того, чтобы предусмотреть возможность варьирования формой обтекаемого препятствия выбираем векторное поле $T \in C^2(R^3)$, равное нулю в окрестности границы Σ и определяем отображение $y = T_\varepsilon(x) = x + \varepsilon T(x),$ которое задает возмущение формы обтекаемого препятствия S. Для малых ε отображение $x \mapsto T_\varepsilon(x)$ является диффеоморфизмом области течения Ω на область $\Omega_\varepsilon = B \setminus S_\varepsilon$, где $S_\varepsilon = T_\varepsilon(S)$ - возмущенное обтекаемое препятствие. Таким образом $u_\varepsilon^{(i)}, \rho_{i\varepsilon}, i = 1,2$, (решения задачи (1) - (4) в возмущенной области Ω_ε) и $J_D(S_\varepsilon)$ (сила сопротивления, действующая на возмущенное препятствие) становятся функциями параметра ε. Следуя методике, предложенной в работе [1], доказывается разрешимость неоднородной краевой задачи (1) - (4) в возмущенных областях Ω_ε [2], устанавливается единственность и устойчивость решений относительно изменения формы области течения, а также получены формулы для вычисления производной функционала сопротивления. Полученные результаты могут быть положены в основу эффективных численных алгоритмов нахождения оптимальной формы препятствия.

Список литературы:

1. Plotnikov, P. Compressible Navier – Stokes equations: theory and shape optimization / P. Plotnikov, J. Sokolowski. – Basel: Springer, 2012. – 474c.

2. Жалнина А. А. О корректности неоднородной краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / А. А. Жалнина, Н. А. Кучер // Сиб. журн. индустр. матем. – Т. 18. – № 3. – 2015. – С. 26–39.